

One hundred and sixty-four presents were announced as having been received since the last meeting, including amongst others :—

T. W. Backhouse, publications of West Hendon House Observatory, No. 2, presented by Mr. Backhouse ; F. H. Bigelow, Eclipse Meteorology and allied problems, presented by the author ; J. Bossert, Détermination des mouvements propres des étoiles, &c. [4 memoirs], presented by the author ; Breslau, Universitäts-Sternwarte, Festschrift zum 90 Geburtstag des Herrn Prof. J. G. Galle, presented by the Observatory ; Cape of Good Hope, Geodetic Survey, vol. 2, Report on re-discussion of Bailey's and Fourcade's surveys, &c. by Sir D. Gill, presented by the Observatory ; Agnes M. Clerke, History of Astronomy during the 19th century, 4th edition, presented by A. & C. Black ; B. Hasselberg, Spectra der Metalle, VI., Molybdän, presented by the author ; E. W. Maunder, Astronomy without a telescope, presented by Witherby & Co. ; Oxford University Observatory, Miscellaneous papers, 1899–1900, presented by the Observatory ; South Kensington, Solar Physics Observatory, The Sun's spotted area, 1832–1900, presented by the Observatory ; S. Tromholt, Catalog der in Norwegen beobachteten Nordlichter, presented by the Christiania Society of Sciences ; C. A. Young, Manual of Astronomy, presented by the author ; 2 photographs of Perrine's Comet, presented by the Astronomer Royal and 4 photographs presented by R. C. Johnson ; portrait of John Goodricke, presented by W. T. Lynn ; 3 photographs of Presidents of the Society, presented by W. H. Wesley.

Sur la Précision des Mesures Photographiques : Réponse à deux Notes de M. H. C. Plummer. Par M. Loewy.

Dans les *Monthly Notices*, vol. lxi., Supplementary Number, p. 618–628 et vol. lxii., No. 7 (1902 May), p. 506–516, M. Plummer formule des critiques nombreuses sur les conclusions auxquelles je suis parvenu dans mes mémoires relatifs à la précision des coordonnées des astres obtenues à l'aide des mesures effectuées sur leurs images photographiées.

Le dernier numéro (1902 May) ne m'étant parvenu que dans le courant du mois de Juin dernier, il m'a été impossible de présenter à la Société royale Astronomique, dans sa séance de Juin, la réponse que je dois opposer aux allégations de M. H. C. Plummer, allégations qui, je n'hésite pas à le dire, étonneront les astronomes qui ont fait des applications rationnelles de la méthode des moindres carrés.

On peut classer les critiques de M. Plummer en deux catégories : les unes reposent sur des interprétations erronées

des tableaux de nombres publiés dans mes mémoires ; les autres ont le caractère d'affirmations pures et simples, dénuées de toute démonstration, en contradiction d'ailleurs avec la réalité des faits.

Ce qui produit un antagonisme aussi absolu entre les vues de M. Plummer et les miennes, c'est que :

1°. M. Plummer ne semble pas se rendre suffisamment compte du caractère différent des erreurs qui interviennent dans toute étude de précision et qui peuvent être classées en trois catégories : erreurs purement accidentelles—erreurs possédant une permanence plus ou moins prolongée, comparables à des inégalités de courtes périodes et affectant d'une même manière des séries de mesures faites dans de petits intervalles de temps ou dans des conditions physiques susceptibles de varier d'un moment à l'autre—erreurs systématiques constantes.

2°. Il n'envisage, dans sa discussion, qu'un tout petit côté de la question ; il examine entre quelles limites la fréquence relative des erreurs concorde avec les règles bien connues du calcul des probabilités. On n'obtient ainsi qu'un critérium très incomplet dont M. Plummer fait souvent un usage non justifié. En dehors même de toute considération sur les conclusions dans une certaine mesure problématiques fournies par le calcul théorique, les règles qui en découlent ne peuvent se manifester que si les données conduisant aux résidus sont en nombre très considérable. C'est à cette condition seule qu'on peut espérer obtenir dans les résidus, relatifs aux deux premières catégories d'erreurs, une distribution en accord convenable avec les prévisions théoriques. Or, dans l'immense majorité des recherches, quelle que soit leur nature, une telle quantité de données homogènes fait défaut ; néanmoins les conclusions qui s'en dégagent restent exactes bien que le contrôle spécial en question n'y soit pas utilisable.

Sous ce rapport des difficultés se présentent même dans les cas les plus simples. En déterminant, par exemple, la valeur d'une inconnue à l'aide de pointés effectués sur un objet unique, astre ou mire terrestre, on est exposé, par suite des fluctuations de l'équation personnelle ou d'appréciations erronées plus ou moins persistantes sur la position du centre des images stellaires, à affecter une série de lectures successives (10 ou 20) d'une même faible erreur constante, inexactitude qui devient autre pour une seconde série exécutée plus tard.

C'est pour de semblables raisons que les astronomes n'ont qu'exceptionnellement recours à ce procédé de contrôle bien connu auquel il manque presque toujours la base nécessaire.

En examinant la loi de distribution des résidus, M. Plummer pourra se donner la satisfaction illusoire de mettre en doute tout ce qui a été publié à peu près jusqu'à l'heure actuelle par les astronomes les plus illustres qui, je suppose, n'ont pas ignoré les règles du calcul des probabilités.

M. Plummer a tenté d'invalider de cette manière quelques-unes des conclusions de mon second mémoire, mais il sera

B 2

démontré un peu plus loin que là, même où un matériel d'observations suffisant a permis de recourir à cette méthode de contrôle dont la rigueur n'est pas absolue, M. Plummer en a fait une application irrationnelle.

Le but que je me proposais dans les mémoires que je viens de publier était d'obtenir l'erreur probable réelle des coordonnées astronomiques tirées des clichés. On sait que jusqu'à présent la nature des opérations multiples exécutées dans la recherche des constantes astronomiques n'a jamais permis d'évaluer à priori le véritable degré d'exactitude du résultat cherché.

Je vais maintenant examiner en détail les objections de M. Plummer et commencer par ses deux critiques principales à l'appui desquelles il a fourni deux tableaux de chiffres empruntés à mes mémoires et qui ont une signification tout autre que celle qu'il leur attribue.

Il a été signalé, dans mon second mémoire, un fait particulier aux observateurs A et B, à savoir qu'il ne se manifeste aucune différence systématique sensible entre les coordonnées des images mesurées par eux, fait qui se produira souvent d'ailleurs pour des opérateurs exercés.

Les tableaux III-2 à III-7, pages 90 et suivantes (circ. n° 9), contiennent 258 ordonnées mesurées dans quatre orientations différentes par l'observateur A et par l'observateur B, et en outre les différences $y_A - y_B$ entre les nombres obtenus pour les deux observateurs. Ces coordonnées sont relatives à 43 étoiles sur lesquelles on a effectué 6 poses successives donnant ainsi 6 images pour chaque astre.

Lorsqu'on prend la moyenne de ces 258 différences $y_A - y_B$, on ne trouve aucun désaccord systématique entre les ordonnées y_A et y_B déterminés par les deux observateurs. La différence moyenne $\frac{y_A - y_B}{258} = -0''.005, \pm 0''.004$, est seulement de quel-

ques millièmes de seconde d'arc et provient uniquement, ainsi qu'on le voit, d'inexactitudes accidentelles dans les mesures. C'est un fait incontestable. M. Plummer aurait pu, en cette circonstance, appliquer sa méthode de prédilection, puisque, dans ce cas, une des conditions essentielles du calcul des probabilités se trouve réalisée ; on est en effet en présence d'un matériel d'observations homogènes conduisant à un nombre assez respectable (258) d'erreurs de caractère accidentel.

Pour mieux mettre ce point en lumière, on a inscrit, dans le tableau suivant, le nombre réel des erreurs de $0''.03$ en $0''.03$, selon leur grandeur et le nombre calculé d'après la théorie. On constatera aisément que l'accord entre les deux séries de chiffres est aussi grand qu'il peut et doit l'être, d'après la vraie nature des choses.

On doit s'attendre en effet à trouver dans la réalité un nombre légèrement plus élevé pour les grands écarts, à cause de l'imperfection de quelques images et des difficultés de mesure qu'on

rencontre quelquefois lorsqu'une image est placée près d'un trait du réseau.

Groupeement et Nombre des Erreurs suivant leur Grandeur.

De 0'' ∞	Réalité.	Diff.	Calcul.	Diff.
à 0'03	65	72	63	57
0'06	137	48	120	48
0'09	185	31	168	35
0'12	216	19	203	24
0'15	235	9	227	15
0'18	244	5	242	8
0'21	249	3	250	5
0'24	252	0	255	2
0'27	252	2	257	1
0'33	254	4	258	0
0'48	258		258	

Erreur probable d'une différence $y_A - y_B = \pm 0''\cdot065$.

Tout astronome, j'en suis convaincu, conviendra qu'il n'y avait ici aucune distinction à admettre entre les modes d'opération des deux observateurs. Mais M. Plummer, qui semble être animé d'une prédisposition systématique à la critique, ne veut pas se rendre à l'évidence.

Voici le procédé auquel il a recours pour jeter un doute sur ce résultat. Au lieu d'examiner la loi de distribution des 258 résidus directement fournis, distribution qui se trouve en harmonie satisfaisante avec le calcul théorique, M. Plummer forme la moyenne des 6 ordonnées des images relatives à une même étoile, de sorte qu'il ramène la discussion, contrairement à la logique de la méthode des moindres carrés, à un nombre de données beaucoup moindre, à l'examen de 43 valeurs seulement, où le hasard aveugle peut se manifester davantage.

Malgré la voie indirecte ainsi suivie, le tableau de chiffres fourni par M. Plummer, *Monthly Notices*, vol. lxii. p. 514, ne peut, étant bien interprété, que confirmer les résultats tirés des tableaux originaux. Pour les 6 ordonnées relatives à 4 étoiles, on y constate des différences $y_A - y_B$ de même sens, tandis que, pour 4 autres étoiles, ces différences sont affectées du signe contraire; pour les 35 étoiles restantes les signes sont alternés.

Pour un esprit non prévenu, ces deux séries de 4 coïncidences, à cause même du fait qu'elles sont de sens contraires, n'ont rien de surprenant.

M. Plummer considère ces résultats comme anormaux et comme révélant une sorte d'incertitude systématique dans le mode d'opération des deux observateurs. Cette opinion est inadmissible. Des écarts analogues se présentent, comme le

savent tous les astronomes expérimentés, dans les séries de mesures les plus simples effectuées même par un observateur seul, à de courts intervalles, sur les objets les mieux définis. La pratique enseigne à se défier des pointés consécutifs et concordants; les divergences, qui se manifestent entre les séries séparées par de notables intervalles, donnent lieu au contraire d'espérer qu'on s'est affranchi des influences physiologiques ou physiques qui se modifient avec le temps. Dans le cas qui nous occupe deux pointés ont été faits par chacun des deux observateurs sur chacune des 6 images. Il est dans la nature des choses de rencontrer de temps à autre des permanences dans le signe des résidus.

En ce qui concerne la grandeur de quelques-uns des écarts qui excitent l'étonnement de M. Plummer (étoiles n^{os} 15 et 29), il suffit d'examiner les résultats d'un cliché quelconque, même des mieux exécutés, pour reconnaître que les images de certaines étoiles sont moins bien venues et ne comportent pas des mesures aussi précises que les autres. Il a été de règle de mesurer à nouveau les coordonnées relatives aux résidus notables. Toutes les valeurs publiées correspondent donc à une réalité indiscutable.

La permanence des signes pour l'étoile n^o 15 aurait dû être pour M. Plummer l'indice d'une imperfection relative dans une au moins des images de cette étoile. Dans le registre des mesures on trouve en effet les renseignements suivants :

Etoile n^o 15, images allongées.

Etoile n^o 29, dernière image du groupe I touche presque le trait du réseau.

Dans ma longue carrière j'ai souvent eu à confronter les résultats émanés de diverses sources et, comme M. Plummer, je me suis attaché quelquefois à noter la fréquence relative des erreurs. Mais la pratique m'a montré que la rareté des grands écarts doit être plutôt un motif de défiance, car elle n'est souvent qu'un résultat de la tendance des observateurs à supprimer les mesures que les écarts avec la moyenne leur dénoncent comme les plus défectueuses. Des écarts sept ou huit fois plus grands que l'erreur probable peuvent parfaitement se présenter dans la pratique et ne justifient pas la suppression des observations correspondantes. Il n'arrive pour ainsi dire jamais que l'état physiologique de l'observateur et la qualité des images stellaires présentent l'homogénéité que suppose l'application du calcul des erreurs.

La première et principale objection de M. Plummer est donc dénuée de toute base réelle et, ce qui était à prévoir, le tableau même présenté par lui ne fait que confirmer qu'il n'y a aucune distinction à établir entre les coordonnées émanant des deux observateurs A et B.

Pour des raisons analogues la seconde critique de M. Plummer n'est pas plus justifiée que la précédente. M. Plummer affirme qu'en combinant les coordonnées obtenues dans deux orientations différant de 180°, on élimine d'une manière à peu près complète

les erreurs systématiques et que les résultats ainsi obtenus offrent des garanties d'exactitude très suffisantes.

Il a été établi par mes recherches que, lorsqu'on mesure les coordonnées rectilignes dans une orientation quelconque de la plaque, ces coordonnées se trouvent affectées de deux catégories d'erreurs de mesure dont l'une provient des inexactitudes purement fortuites des pointés, et dont l'autre, d'une nature plus complexe, reste invariable et dépend de plusieurs causes dont les deux principales sont : l'erreur physiologique Es_1 de l'astronome qui ne place pas l'image au milieu des deux fils parallèles du micromètre et celle Es_2 qui provient d'une appréciation erronée du centre du disque qui, même pour les meilleures images, ne présente pas toujours une netteté parfaite.

La première Es_1 ne se manifeste pas ou à peine pour des observateurs habiles ; son influence s'éliminerait toutefois par la combinaison des mesures faites coup sur coup dans deux orientations différant de 180° ; la seconde Es_2 est indépendante de l'observateur et provient, comme je l'ai expliqué (circ. n° 9, p. 9), de tout un ensemble de causes physiques et optiques, du manque d'homogénéité de la couche de gélatine, de la définition imparfaite des images, du microscope employé aux mesures et de sa mise au foyer plus ou moins exacte, des conditions d'éclairage, etc. . . . Cette seconde source d'erreurs, dont M. Plummer nie l'existence, ne peut être évitée et les séries de mesures faites dans des orientations différentes de la plaque en subissent toujours plus ou moins l'influence.

Pour mettre ces conclusions en défaut, M. Plummer emploie les mêmes tableaux déjà cités et en fait un nouvel extrait qui le conduit à des conclusions contraires à celles qui se dégagent des nombres originaux quand on y applique directement les méthodes du calcul des probabilités.

Dans les tableaux de mon second mémoire on trouve, pour chaque étoile, 8 ordonnées mesurées dans 4 orientations différentes par chacun des deux observateurs. Pour mettre en lumière l'influence et la grandeur de chacune des deux erreurs systématiques Es_1 et Es_2 , on a conclu les erreurs probables par deux méthodes différentes. La solution I a été obtenue en calculant pour chacune des 43 étoiles la moyenne M des 8 ordonnées respectives correspondantes :

$$M = \frac{y_o^A + y_{90}^A + y_{180}^A + y_{270}^A + y_o^B + y_{90}^B + y_{180}^B + y_{270}^B}{8},$$

puisqu'il n'y a aucune différence à faire entre le mode de mesure des 2 observateurs ; on a ensuite formé les résidus en comparant chacune des 8 ordonnées à leur moyenne M et de l'ensemble des résidus on a déduit les erreurs probables indiquées sous le titre solution I dans le tableau donné plus loin.

Pour la solution II, on a d'abord pris, pour chaque observateur A et B, les moyennes $\frac{y_o + y_{180}}{2}$, $\frac{y_{90} + y_{270}}{2}$ et, ensuite, les

différences $\frac{y_0+y_{180}}{2}-\frac{y_{90}+y_{270}}{2}$, différences dès lors indépendantes de l'erreur physiologique Es_1 . L'ensemble de ces résidus $\frac{y_0+y_{180}}{2}-\frac{y_{90}+y_{270}}{2}$ a conduit aux erreurs probables figurant sous le titre solution II dans le tableau ci-après :

	Solution I.		Solution II.	
	Groupe I.	Groupe III.	Groupe I.	Groupe III.
Première image	$Ep = \pm 0^{\prime\prime}.095$	$Ep = \pm 0^{\prime\prime}.097$	$Ep = \pm 0^{\prime\prime}.088$	$Ep = \pm 0^{\prime\prime}.084$
Deuxième image	$\pm 0^{\prime\prime}.099$	$\pm 0^{\prime\prime}.097$	$\pm 0^{\prime\prime}.084$	$\pm 0^{\prime\prime}.082$
Troisième image	$\pm 0^{\prime\prime}.107$	$\pm 0^{\prime\prime}.104$	$\pm 0^{\prime\prime}.097$	$\pm 0^{\prime\prime}.095$
Moyenne...	$\dots \pm 0^{\prime\prime}.100$	$\pm 0^{\prime\prime}.099$	$\pm 0^{\prime\prime}.090$	$\pm 0^{\prime\prime}.087$

Comme on le voit, les deux solutions révèlent d'un commun accord l'existence d'un erreur systématique Es , puisque leurs valeurs numériques dépassent notablement l'erreur accidentelle Ea d'une moyenne reposant sur deux pointés.

En prenant la moyenne entre les ordonnées respectives différant de 180° , on a rendu la seconde solution indépendante de l'erreur physiologique Es_1 ; elle ne renferme dès lors que l'erreur physique Es_2 . La première solution, au contraire, où l'on a supposé l'indépendance absolue des résidus dans les diverses orientations, met en évidence la totalité de l'erreur systématique $Es = \sqrt{(Es_1)^2 + (Es_2)^2}$.

Le peu de différence qui existe entre les nombres de la solution I et ceux de la solution II prouve que l'erreur physiologique Es_1 , pour les deux observateurs considérés, ne joue qu'un rôle tout à fait secondaire.

M. Plummer, par une méthode purement inductive, tente de mettre en doute ces conclusions. Il forme la moyenne $M = \frac{y_0+y_{90}+y_{180}+y_{270}}{4}$ des 4 ordonnées pour chaque observateur

et pour chaque image, et il compare chacune des 4 ordonnées individuelles à leur moyenne; il obtient ainsi pour chaque image, dans chaque orientation, 43 résidus dont il forme la moyenne générale. C'est ainsi qu'il a établi (*Monthly Notices*, p. 513, vol. lxii.) un tableau dont nous allons examiner maintenant la véritable signification.

Pour mieux faire comprendre la discussion qui va suivre il est utile de fournir ici quelques courtes explications sur la manière dont les mesures ont été effectuées.

Les ordonnées des images ont été mesurées dans une position déterminée du cliché, d'une manière ininterrompue par le même observateur dans l'espace de quelques heures, par conséquent dans les mêmes conditions physiques d'éclairage, de mise au foyer, etc. . . . En outre, comme il s'agit d'images de même espèce, images à contours normaux, on doit s'attendre à ce que l'erreur

physique Es_2 ait pu conserver en majeure partie le même signe dans chaque position. Mais cette erreur physique Es_2 aura en général des valeurs différentes et des signes quelconques pour toute autre orientation.

Chaque série individuelle de 43 résidus se trouvant affectée d'une erreur systématique Es , il en résulte naturellement que chacune des 4 moyennes M_0 , M_{90} , M_{180} , M_{270} de ces quatre séries de 43 résidus doit différer sensiblement de zéro. Lorsqu'on forme ensuite la moyenne M de ces quatre nombres moyens, $M = \frac{m_0 + m_{90} + m_{180} + m_{270}}{4}$, et les différences $M - m_0$, $M - m_{90}$, $M - m_{180}$, $M - m_{270}$, on doit généralement rencontrer deux de ces différences affectées du signe + et les deux autres du signe -, puisque la somme de ces quatre valeurs doit être égale à 0 ; et, contrairement à la thèse de M. Plummer, des compensations forcées se produiront aussi bien pour les positions différant de 90° que pour celles différant de 180° . C'est cette conclusion si élémentaire qui n'a pas été aperçue par M. Plummer.

Plaçons maintenant sous les yeux du lecteur les nombres moyens du tableau de M. Plummer (p. 513 des *Monthly Notices*, vol. xlii.).

Observateur A.				Observateur B.			
0° .	180° .	90° .	270° .	0° .	180° .	90° .	270° .
Moyennes $+0''\cdot096$	$-0''\cdot108$	$+0''\cdot072$	$-0''\cdot059$	$+0''\cdot073$	$-0''\cdot042$	$+0''\cdot035$	$-0''\cdot066$

Ou en écrivant ces nombres dans un ordre un peu différent on a aussi :

Observateur A.				Observateur B.			
270° .	0° .	180° .	90° .	270° .	0° .	180° .	90° .
Moyennes $-0''\cdot059$	$+0''\cdot096$	$-0''\cdot108$	$+0''\cdot072$	$-0''\cdot066$	$+0''\cdot073$	$-0''\cdot042$	$+0''\cdot035$

On y constate sans difficulté que des compensations complètes se présentent pour les positions différant seulement de 90° ; pour l'observateur B en particulier les compensations sont encore plus complètes pour les positions différant de 90° (270 et 0) (180 et 270) que pour celles de 180° .

En résumé le tableau de M. Plummer, qui est purement inductif, ne peut fournir que des renseignements généraux complètement en accord d'ailleurs avec les conclusions fournies par l'application directe de la méthode des moindres carrés. Il indique que les opérations faites dans une seule orientation sont affectées d'erreurs systématiques qui se compensent en partie si on les combine avec des mesures réalisées dans une autre orientation quelconque. Mais, pour se rendre compte d'une manière précise de la provenance et de l'importance des erreurs systématiques, il fallait exécuter une analyse directe, comme je l'ai fait dans le second mémoire, en recherchant l'une après l'autre les diverses causes d'erreurs systématiques influant sur les résultats. Il a été

ainsi établi plus haut, qu'après avoir formé les différences $\frac{y_0 + y_{180}}{2} - \frac{y_{90} + y_{270}}{2}$, différences indépendantes de l'erreur physiologique Es_1 , les résidus décèlent la présence d'une erreur systématique Es_2 , pour laquelle on a adopté la valeur $\pm 0''\cdot 073$, supérieure à l'erreur physiologique Es_1 qui, à cause de sa faiblesse, pouvait être considérée comme négligeable. S'il n'en avait pas été ainsi, on aurait fait entrer dans les formules l'effet combiné des deux éléments Es_1 et Es_2 . Il est loin de ma pensée de prétendre que l'erreur physiologique Es_1 n'existe pas pour d'autres observateurs ; elle se manifestera probablement d'une manière sensible dans un certain nombre de cas. Pour la mettre en lumière et pouvoir en tenir compte, on n'aura qu'à suivre la voie qui vient d'être indiquée, c'est-à-dire comparer les nombres résultants des solutions I et II.

Il convient maintenant d'examiner les affirmations dans lesquelles s'aventure M. Plummer.

Il en est une que je dois relever d'abord comme dénuée de tout fondement et de plus peu courtoise pour les deux observateurs chargés des mesures des clichés relatifs à la planète *Eros*. M. Plummer a abusé d'une remarque faite à la page 11 de la circulaire n° 9 : *“En ce qui concerne le cliché P, quelques incertitudes très légères se sont révélées au début des mesures, où les observateurs A et B n'avaient pas la sûreté d'une pratique prolongée, mais ultérieurement pour tous les deux l'erreur physiologique Es_1 s'est complètement évanouie.”*

Les deux observateurs dont il est question sont des observateurs excellents et, à l'exception de leurs deux ou trois premières séances au début des opérations consacrées au cliché P, toutes les nombreuses mesures ultérieures ont été exécutées par eux dans des conditions de précision qui peuvent être difficilement surpassées. Les quelques écarts qui se trouvent dans les séries de résidus n'étonneront aucun astronome expérimenté ; si ces écarts y manquaient on serait en droit de soupçonner l'effet de suppressions arbitraires.

M. Plummer déclare magistralement que les données que j'ai utilisées ne sont pas suffisantes pour déterminer les constantes qui entrent dans mes formules. C'est encore une affirmation, faite très à la légère.

La plupart de ces constantes ont été évaluées directement. C'est ainsi que l'erreur accidentelle Ea a été déduite de séries considérables de pointés, de même que l'erreur de pointés sur les traits du réseau a été déterminée directement, les images stellaires n'y intervenant pas. Il suffit pour fixer la grandeur de ces constantes d'étudier un ou deux clichés ; mais ici ces expériences ont été multipliées. Ces deux constantes sont donc fixées à priori et d'une manière absolument indépendante les unes des autres. Je ne crois pas qu'il existe un observatoire s'occupant de photographie astronomique de précision, où l'on n'ait pas pratiqué ce genre d'expériences et où on ne connaîtrait pas d'une

manière sûre la valeur numérique de ces constantes si faciles à apprécier.

Pour mettre en évidence l'accroissement de l'erreur probable provenant de la dégradation des disques stellaires, relative aux deux grandeurs-limites, les clichés suivants ont été utilisés :

1900, 23 Octobre, 58 étoiles, à 4 images.

1901, 13 Février, 83 „ 4 „

1900, 19 Octobre, 82 „ 3 „

1900, 25 Décembre $\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ pose : 43 étoiles à 3 images.} \\ 2^{\text{me}} \text{ „ 43 „ 3 „} \\ 3^{\text{me}} \text{ „ 43 „ 3 „} \end{array} \right.$

C'est un matériel d'observations bien supérieur à celui qui serait nécessaire pour l'évaluation des deux constantes dont dépend l'augmentation de l'erreur probable. Un seul cliché, réalisé dans des conditions d'exactitude moyenne, contenant quelques centaines d'étoiles jusqu'à la 12^{me} grandeur environ et présentant deux ou trois images pour chaque astre, permettra de vérifier d'une manière complète ces conclusions si importantes au point de vue de la pratique. Au lieu de se contenter de produire des négations pures et simples, M. Plummer ferait mieux d'emprunter à quelque observatoire un ou deux clichés et d'effectuer sur les coordonnées mesurées quelques-unes des recherches dont il met en doute les résultats. En groupant, par exemple, les différences entre les ordonnées de deux images voisines d'un même astre suivant l'ordre de grandeur des images stellaires, il verrait de suite que l'erreur probable croît dans une proportion considérable à mesure qu'on se rapproche de la limite de visibilité des étoiles photographiées. Il constaterait en même temps que les mesures effectuées sur les disques les plus faibles sont aussi précises que celles qui se rapportent aux images les plus visibles. Il serait ainsi amené à se convaincre que l'accroissement de l'erreur probable, spécial aux deux dernières grandeurs-limites, est dû uniquement à la dégradation des disques qui n'apparaissent qu'imparfaitement sous l'action de faisceaux lumineux très faibles. Toutes ces conséquences lui sauteraient aux yeux immédiatement. L'expérience lui ferait de même toucher du doigt l'action qui tient à la déformation irrégulière de la gélatine, action qui déplace à la fois les traits du réseau et les images stellaires. Je considère comme une des plus importantes conclusions de mes dernières recherches d'avoir démontré que ces inexactitudes de nature purement physique, indépendantes des opérations de mesure, jouent un rôle capital dans la détermination des coordonnées rectilignes ; et que, si l'on n'a pas pris les précautions indiquées pour atténuer ces causes perturbatrices dans l'exécution des clichés, il devient inutile par suite de multiplier les mesures, aussi bien au point de vue du nombre des pointés que de celui des orientations. Les deux

formules données page 109, circ. n° 9, permettent d'évaluer séparément l'influence des opérations de mesure et celle des causes physiques.

M. Plummer (*Monthly Notices*, vol. lxi. page 626, §12) établit la règle absolue qu'il faut adopter pour unité de mesure et comme seule base de détermination des coordonnées rectilignes la moyenne des lectures obtenues dans deux orientations de la plaque différant de 180° ; et il trouve peu profitable d'effectuer des mesures dans des orientations plus variées, mais il ne donne aucun moyen d'évaluer l'exactitude ni dans un cas ni dans l'autre. Ces opinions sont insoutenables.

Dans chaque recherche individuelle les précautions à prendre sont dictées par la précision qu'on désire atteindre et, selon les circonstances, il sera judicieux d'exécuter les travaux de mesure dans une, deux ou quatre orientations différentes du cliché et même de les faire répéter encore une seconde fois. Lorsqu'il s'agit d'une vaste entreprise, telle que la Carte photographique du Ciel, par exemple, où l'on se propose d'obtenir les coordonnées photographiques de millions d'astres, le degré d'exactitude réclamé ne sera pas le même que celui exigé dans la détermination des parallaxes stellaires ou des positions de la planète *Eros*. Les formules publiées ont été établies dans le but de pouvoir se rendre compte à priori de l'ensemble des opérations de mesure à accomplir pour arriver au degré d'approximation désiré.

Comme les opinions émises par M. Plummer pourraient jeter quelque discrédit sur les travaux relatifs à la Carte du Ciel qui, dans plusieurs observatoires, reposent sur des observations effectuées dans une seule orientation de la plaque, il est nécessaire de montrer que ce mode d'opération comporte un degré d'exactitude tout à fait en rapport avec le but poursuivi. Dans cette entreprise, on a en vue d'obtenir à l'aide de la photographie les positions de quelques millions d'étoiles avec la même précision que celle fournie par les meilleures observations méridiennes. Conformément aux conventions établies, les coordonnées photographiques reposent, dans cette œuvre, sur la moyenne des mesures effectuées sur deux images de chaque étoile. Voici le renseignement que fournissent à cet égard les formules développées, en désignant par Ep^{ch} l'erreur tenant à la constitution de la couche sensible et aux actions chimiques qui interviennent dans la production des images et par Ep^m celle provenant uniquement des opérations de mesure : pour 1 orientation . . . $Ep^{ch} = \pm 0''.098$. $Ep^m = \pm 0''.094$. $Ep^{totale} = \pm 0''.136$. Pour 2 orientations . . . $Ep^{ch} = \pm 0''.098$. $Ep^m = \pm 0''.067$. $Ep^{totale} = \pm 0''.118$.

Ainsi, la précision atteinte dans les deux cas ne diffère pas sensiblement, à cause de l'action considérable des erreurs physiques qui ne s'éliminent pas quel que soit le nombre de mesures effectuées. On constate de plus que, dans les deux cas, l'exactitude obtenue dépasse celle que réalise la moyenne de plusieurs observations méridiennes. En résumé : l'emploi de deux orientations exige une augmentation notable du travail, mais offre

l'avantage de signaler immédiatement les grosses méprises qui peuvent se glisser dans l'exécution des mesures ; en opérant dans une seule orientation on économise des labeurs notables, mais on doit, pour vérifier les coordonnées, attendre que la seconde série de plaques prévue ait été réduite.

Cette conclusion acquiert encore plus de poids si l'on considère qu'à ces inexactitudes s'ajoute l'erreur bien plus grande provenant des positions des étoiles de repère destinées à la détermination des constantes des clichés. En effet une recherche, accomplie à l'occasion du premier volume du catalogue photographique (coordonnées rectangulaires) de la zone de Paris, a conduit à évaluer à $\pm 0''\cdot 26$ au minimum l'incertitude provenant de cette source et relative à l'une ou l'autre des deux coordonnées du centre de la plaque. Dans cette publication les constantes des clichés sont déduites à l'aide des positions de 21 étoiles de repère tirées de tous les catalogues existants (de 6 environ, en moyenne). Toutefois cette incertitude peut être notablement amoindrie si l'on effectue à l'époque actuelle des observations méridiennes particulièrement consacrées à ce but. Quoiqu'il en soit sous ce dernier rapport il est permis d'affirmer que dans l'état actuel des choses l'exactitude d'une coordonnée stellaire rapportée au centre du cliché par l'un ou l'autre des deux procédés de mesure indiqués dépasse dans une large proportion la précision exigée par le plan de travail. Ainsi qu'on le voit elle est au moins équivalente à celle fournie par une quarantaine de positions méridiennes empruntées aux catalogues d'étoiles actuellement connus.

Les deux procédés sont donc à des titres différents également recommandables. M. Plummer aurait dû, avant de formuler ses critiques, supposer que les directeurs d'observatoires, qui ont la science et la pratique de ces travaux, avaient eu quelque motif de choisir le premier procédé pour des raisons ignorées par lui.

Il me reste encore une dernière remarque à présenter au sujet d'une des critiques de M. Plummer, qui repose uniquement sur une interprétation erronée de ma pensée. Il s' imagine que j'ai conseillé aux astronomes d'opérer, pour tous les cas, dans quatre orientations de la plaque. J'ai seulement dit : Si l'on veut atteindre un très haut degré de précision dans la détermination des coordonnées, il faut agir de la sorte ; et, en outre, j'ai fait ressortir, dans les derniers mémoires, que ce surcroît de travail ne saurait porter ses fruits si l'on n'a pas exécuté les clichés dans des conditions telles que les erreurs physiques aient été amoindries dans une proportion considérable, c'est-à-dire en faisant deux ou trois groupes de poses multiples, séparés les uns des autres par un intervalle de plusieurs minutes d'arc.

Les recherches expérimentales ne peuvent inspirer confiance qu'à la condition qu'on soit parvenu à fixer d'avance l'exactitude que possèdent les données fondamentales dont dépend le résultat final. Dans les observatoires particulièrement consacrés à la

photographie céleste, où on produit des centaines de clichés de même nature, il importe de connaître le véritable degré d'approximation avec lequel on peut tirer d'une de ces plaques les coordonnées des astres photographiés. Cette enquête si nécessaire est, heureusement, quoi qu'en pense M. Plummer, très facile à réaliser ; il suffit en suivant à peu près la voie indiquée d'étudier tout au plus deux ou trois clichés pour se rendre compte de l'influence numérique de chacune des diverses causes d'inexactitude mentionnées et dont l'ensemble altère les coordonnées conclues. Selon la constitution des clichés on trouvera, bien entendu, des valeurs différentes pour les erreurs probables correspondantes, mais on vérifiera toujours sans peine la réalité des sources qui les ont fait naître.

En utilisant les données fournies dans mon premier mémoire, circ. n° 8, M. Plummer a fourni, d'après son procédé, une appréciation de l'erreur probable d'une ordonnée mesurée dans deux orientations. Il trouve ainsi (*Monthly Notices*, vol. lxi. p. 627) $\pm 0''060$. En présentant un tel résultat M. Plummer a omis de tenir compte de tout un ensemble de causes physiques dont la valeur numérique est maintenant connue. L'erreur réelle dans le cas considéré (cliché P, 3 images, 2 pointés, 2 orientations) est $\pm 0''10$, et encore ce nombre ne s'applique qu'aux images précédant d'une grandeur la limite de visibilité. M. Plummer suit dans ce cas les mêmes errements que les astronomes qui, durant une partie notable du siècle écoulé, ont calculé des erreurs probables tellement en désaccord avec la réalité qu'ils ont failli compromettre l'application de la belle méthode des moindres carrés.

Il m'a paru nécessaire de répondre aux critiques de M. Plummer, critiques qui pouvaient influencer l'appréciation des lecteurs peu familiers avec les études spéciales dont il est question. Mais je ne continuerai plus une polémique qui me paraît désormais dépourvue de toute utilité.

On the Accuracy of Photographic Measures. Third Note: Reply to M. Loewy. By H. C. Plummer, M.A.

By the courtesy of the Secretaries I have been permitted to see the preceding paper in proof, and it may be convenient to have my reply at once.

In one thing at least I am in the heartiest agreement with M. Loewy. It would be quite unprofitable to prolong the present controversy. I shall therefore not be misunderstood if I do not discuss the specific points to which M. Loewy refers.

With the advantage of having read M. Loewy's reply, I should have been glad to take the opportunity to revise my